Integrale definite

Formula Leibniz – Newton:

Fie f : [a, b] → R o funcție continuă, F : [a, b] → R primitivă a lui *f* pe [a, b].

Numărul $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$ se numește *integrala definită* a funcției *f* pe intervalul [a, b].

• Aplicațiile integralelor definite

1. **Aria subgraficului unei funcții.** Dacă funcția *f* : [a, b] → R este continuă și pozitivă pe intervalul [a, b] atunci mulțimea punctelor din plan cuprinsă între graficul funcției *f*, axa Ox și dreptele de ecuații *x* = a și *x* = b are arie care este egală cu:

$$\boxed{\mathcal{A}ria = \int_a^b f(x)dx}$$

OBS. Dacă funcția *f* : [a, b] → R este continuă și negativă pe intervalul [a, b] atunci $\mathcal{A}ria = -\int_a^b f(x)dx$

2. **Volumul corpurilor de rotație** Dacă funcția *f* : [a, b] → R este continuă pe intervalul [a, b] atunci corpul de rotație determinat de *f* are volum egal cu:

$$\boxed{\mathcal{V}ol = \pi \int_a^b f^2(x)dx}$$

• Metode de calcul ale integralelor definite

1. **Metoda integrării prin părți .**

Dacă f, g: [a, b] → R sunt două funcții derivabile cu derivate continue, atunci

$$\boxed{\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx}$$

Se dau		Se cer
f(x)	$\xrightarrow{\text{derivare}}$	f ' (x) = [f(x)] '
g'(x)	$\xrightarrow{\text{integrare}}$	g(x) = $\int g'(x)dx$

2. **Metoda schimbării de variabilă (metoda substituției)**

Fie două funcții f : I → R continuă pe I și u : [a, b] → I derivabilă și cu derivata continuă pe [a, b]. Atunci

$$\boxed{\int_a^b f(u(x))\cdot u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt}$$

Notăm: $u(x) = t$

Derivăm: $u'(x)\, dx = dt$

Schimbăm capetele integralei: $x_1 = a \Rightarrow t_1 = u(a)$

$x_2 = b \Rightarrow t_2 = u(b)$