TABEL DE INTEGRALE NEDEFINITE

funcții raționale	1.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	CP: $\int 1dx = x + C$; $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$
	2.	$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$	**CP₁** $\int \frac{1}{x^n} dx = \int x^{-n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} + C$ **CP₂** $\int \sqrt{x^n} dx = \int x^{\frac{n}{2}} dx = \frac{x^{\frac{n}{2}+1}}{\frac{n}{2}+1} + C$ $\int \sqrt[3]{x^n} dx = \int x^{\frac{n}{3}} dx = \frac{x^{\frac{n}{3}+1}}{\frac{n}{3}+1} + C$
	3.	$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	
	4.	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$	
	5.	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$	
funcții **exponențiale**	6.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	**CP:** $\int e^x dx = e^x + C$
funcții trigonometrice	7.	$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	
	8.	$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	
	9.	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$	
	10.	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$	
	11.	$\int tgx dx = -\ln\lvert \cos x\rvert + C$	
	12.	$\int ctgx dx = \ln\lvert \sin x\rvert + C$	
funcții iraționale	13.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C$	
	14.	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 - a^2}\right\rvert + C$	
	15.	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	

EXERCIŢII PROPUSE

I. Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii şi să se verifice rezultatele obţinute:

1. $\int x^5\,dx$
2. $\int 5x^4\,dx$
3. $\int (x^6 + x^3 - x^2 + x - 1)dx$
4. $\int (x^5 + 5x^4 - 2x^2 + 3x + 4)dx$
5. $\int (3x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x - 3)dx$

II. Să se calculeze primitivele următoarelor funcţii

A	B	C	D
1. $\int \frac{1}{x^2}\,dx$	1. $\int \sqrt{x}\,dx$	1. $\int \frac{3}{x^2+4}\,dx$	1. $\int 4^x\,dx$
2. $\int \frac{4}{x^3}\,dx$	2. $\int 2\sqrt{x^3}\,dx$	2. $\int \frac{5}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$	2. $\int e^{-x}\,dx$
3. $\int (\frac{6}{x^3} - \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x})dx$	3. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$	3. $\int \frac{4}{x^2-16}\,dx$	3. $\int e^{2x}\,dx$
4. $\int \frac{x^2-4}{x}\,dx$	4. $\int 2\sqrt[3]{x^2}\,dx$	4. $\int \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$	4. $\int e^{-3x}\,dx$
5. $\int \frac{x+1}{x^4}\,dx$	5. $\int 12\sqrt[3]{x^5}\,dx$	5. $\int \frac{3}{\sqrt{x^2-2}}\,dx$	5. $\int 6^{-2x}\,dx$
6. $\int \frac{6x^3-3x^2+6}{x^2}\,dx$	6. $\int 10\sqrt{x^5}\,dx$	6. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$	6. $\int \frac{1}{e^{4x}}\,dx$

Primitive

Def. Fie f : I → R, I interval.   Funcția derivabilă F : I → R se numește **PRIMITIVĂ** a funcției $f \Leftrightarrow \boxed{F'(x) = f(x)}$ $\forall x \in I$.

1. Se consideră funcţiile f, F : R→R , $f(x) = e^x + x^2 + 2x$ şi $F(x) = e^x + \frac{x^3}{3} + x^2 + 1$. Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f .

2. Se consideră funcţiile F, f : **R** → **R**, $F(x) = x \cdot e^x$ şi $f(x) = (x + 1)e^x$. Să se verifice că funcţia F este o primitivă a funcţiei f .

3. Se consideră funcţiile f , F : (0; +∞) → **R** , $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ şi $F(x) = x + \frac{1}{x}$. Să se verifice că funcţia F este o primitivă a funcţiei f .

Mulțimea primitivelor unei funcții f : I → R se numește ***integrala nedefinită*** a funcției f și se notează prin $\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C}$,unde C este mulțimea tuturor funcțiilor constante.

Proprietăți:

P1: Operația de integrare este inversa operației de derivare	$\boxed{\int f'(x)dx = f(x) + C}$
P2: Formula de linearitate a integralei:	$\boxed{\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx}$

4. Fie funcţia f : [1, e] → R, $f(x) = \ln x$. Să se determine $\int f'(x)\, dx$.

5. Se consideră funcţia f : ***R***→ ***R*** , $f(x) = 1 - 2x + x^2$. Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei f.

6. Se consideră funcţia f : [0, 1]→ ***R*** , $f(x) = 1 - \sqrt{x}$. Să se determine primitivele funcţiei f.

7. Se consideră funcţiile f , g : [0,1] → **R** , $f(x) = e^x$ şi $g(x) = e^{-x}$.

a) Să se determine primitivele funcţiei f.

b) Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei g.

8. Pentru fiecare $n \in N^*$ se consideră funcţiile f_n : [0, 1] → **R** , $f_n(x) = x^n + (1 - x)^n$. Să se determine mulţimea primitivelor funcţiei f_2 .

9. Pentru $n \in N^*$ se consideră funcţiile f_n : [0,1] → **R** , $f_n(x) = \frac{x^n + x + 2}{x + 1}$. Să se determine $\int x \cdot f_1(x)\, dx$

10. Fie f_n: [0, 1] → **R**, $f_n(x) = (x^{n+1} + 1) \cdot e^x$. Să se determine $\int f_0(x) \cdot e^{-x}\, dx$.

P3. Funcția f ***admite primitive*** pe I dacă f este ***continuă*** pe I .	$\boxed{\lim_{\substack{x \to a \\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} f(x) = f(a)}$ ⇒ f este continuă în punctul $x = a$ Dar f este continuă pe (- ∝,a) ∪ (a, ∝) fiind formata din functii elementare Deci f este continuă pe ***R*** ⇒ f ***admite primitive*** pe ***R.***

11. Se consideră funcţia f : **R** → **R** , $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2, & x \le 1 \\ (x+1)\ln x, & x > 1 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe **R**

12. Se consideră funcţia f : ***R*** → ***R***, $f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \le 0 \\ \frac{x}{x+1}, & x > 0 \end{cases}$. Să se arate că funcţia f admite primitive pe **R**.

Aplicaţii

Determinarea primitivei care satisface o condiție dată	
Să se determine primitiva F a funcției f pentru care $F(a) = b$	**Etape** • **Determinăm mulțimea primitivelor funcției f** $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ - mulțimea primitivelor funcției f • **Alegem o primitivă din mulțimea primitivelor pentru o valoare nedeterminată a unei constante $c \in R$** Fie F : $R \to R$, $F(x) = ... + c$, $c \in R$ o primitivă a funcției f • **Determinăm valoarea constantei c din egalitatea $F(a) = b$** • **Determinăm primitiva cerută pentru valoarea lui c determinată**

13. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x-4$. Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=2017$.

14. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2$. Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=2015$.

15. Se consideră funcția $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^n}$, $n\in$N* . Să se determine primitiva G a funcției $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{f_2(x)}$, care verifică relația $G(1)=\dfrac{13}{15}$.

Proprietățile primitivelor		
1. Orice ***primitivă*** a funcției f este ***crescătoare*** pe I Fie F o primitivă a funcției $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ F este crescătoare pe I $\Leftrightarrow F'(x) > 0, \forall x \in I \Leftrightarrow$ $f(x) > 0, \forall x \in I$	**16**	Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$. Arătați că orice primitivă a funcției f este funcție crescătoare pe intervalul $(-1,+\infty)$.
2. Orice ***primitivă*** a funcției f este ***descrescătoare*** pe I Fie F o primitivă a funcției $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$ F este descrescătoare pe I $\Leftrightarrow F'(x) < 0, \forall x \in I \Leftrightarrow$ $f(x) < 0, \forall x \in I$	**17**	Se consideră funcția f : $R\to R$, $f(x) = x^2 - 4$. Demonstrați că orice primitivă a funcției f este descrescătoare pe intervalul (-2, 2)
3. Orice ***primitivă*** a funcției f este ***convexă*** pe I Fie F o primitivă a funcției $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$ $F''(x) = f'(x)$ F este convexă pe I $\Leftrightarrow F''(x) > 0, \forall x \in I \Leftrightarrow$ $f'(x) > 0, \forall x \in I$	**18**	Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x^3+2x$. Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$.
4. Orice ***primitivă*** a funcției f este ***concavă*** pe I Fie F o primitivă a funcției $f \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \Leftrightarrow$ $F''(x) = f'(x)$ F este concavă pe I $\Leftrightarrow F''(x) < 0, \forall x \in I \Leftrightarrow$ $f'(x) < 0, \forall x \in I$	**19**	Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x+1$. Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$.