Aplicatiile derivatelor în studiul funcţiilor

1. Se consideră funcţia $f : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x-2) \cdot e^x$. Să se determine intervalul pentru care funcția f este crescătoare și punctul de extrem.

2.Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Să se determine intervalul pentru care funcția f este convexă.

3 Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x \cdot x^2$. Să se studieze monotonia funcției.

*4.*Să se determine intervalele de monotonie și punctele de extrem pentru funcţia

$f : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.

5.Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$.

a) Să se arate că $f'(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{(x^2+x+1)^2}$.

b) Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

c) Să se arate că f(x)$\geq \frac{1}{3}$, $\forall x > -1$.

6.Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \setminus \{1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

a) Să se determine intervalele de monotonie .

b) Să se determine ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(2; 3)$.

c) Să se determine ecuațiile asimptotelor funcției.

7.Se consideră funcţia $f : (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x-2) \cdot \ln x$. Să se calculeze $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

8. Se consideră funcţia f: $[3, \infty) \to R, f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$

a) Să se calculeze $f'(5)$

b)Să se studieze monotonia funcției și punctele de extrem.

c)Să sedemonstreze că f este convexă pe $[3, \infty)$.

Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor

Definiţie:Fie f:D→R.Un punct $x_0 \in D$ se numeşte punct de maxim local(respectiv de minim local)al lui f dacă există o vecinătate U a punctului x_0 astfel încât $f(x) \le f(x_0)$(respectiv $f(x) \ge f(x_0)$) pentru orice $x \in D \cap U$.

Dacă $f(x) \le f(x_0)$(respectiv $f(x) \ge f(x_0)$) pentru orice $x \in D$ atunci x_0 se numeşte punct de maxim absolut(respectiv minim absolut)

Rolul primei derivate

3. Fie *f* o funcţie derivabilă pe un interval I.

Dacă $f'(x) > 0 (f'(x) \ge 0), \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este strict crescătoare(crescătoare) pe I.

Dacă $f'(x) < 0 (f'(x) \le 0), \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este strict descrescătoare(descrescătoare) pe I.

4.Fie f:D→ R,D interval şi $x_0 \in D$ .Dacă

1)f este continuă în x_0

2)f este derivabilă pe D-$\{x_0\}$

3)există $\lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \overline{R}$

atunci f are derivată în x_0 şi $f'(x_0) = l$ .Dacă $l \in R$ atunci f este derivabilă în x_0 .

Observaţie: Cu ajutorul primei derivate se stabilesc intervalele de monotonie ale unei funcţii derivabile şi se determină punctele de extrem local.

Rolul derivatei a doua

T**eoremă**: Fie *f* o funcţie de două ori derivabilă pe I.

Dacă $f''(x) \ge 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este convexă pe I.

Dacă $f''(x) \le 0, \forall x \in \mathrm{I}$, atunci *f* este concavă pe I.

Definiţie: Fie *f* o funcţie continuă pe I si $x_0 \in \mathbf{I}$ punct interior intervalului. Spunem că x_0 este punct de inflexiune al graficului funcţiei dacă *f* este convexă pe o vecinătate stânga a lui x_0 şi concavă pe o vecinătate dreapta a lui x_0 sau invers.

Observaţie:Cu ajutorul derivatei a doua se stabilesc intervalele de convexitate şi concavitate şi se determină punctele de inflexiune.