

FIȘĂ DE LUCRU

SUBIECTUL I

- 5p** 1. Arătați că $(1+\sqrt{5})^2 - \sqrt{20} = 6$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x \cdot 8^{x+1} = 16^{2x}$.
- 5p** 4. Determinați numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 15.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(a, a+1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctul A se află pe dreapta de ecuație $y = 2x - 1$.
- 5p** 6. Demonstrați că $(2\sin x + 3\cos x)^2 + (3\sin x - 2\cos x)^2 = 13$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & x-1 \\ x-1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(2)) = 3$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(x) \cdot A(y) = A(2xy - x - y + 1)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Determinați numărul real a , știind că $A(a) = A(x) \cdot A\left(\frac{1}{2}\right) \cdot A(y)$, pentru orice numere reale x și y .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y - \frac{xy}{4}$.
- 5p** a) Arătați că $6 * 2 = 5$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $x * (4x) = 6$.
- 5p** c) Calculați $1 * 2 * 3 * \dots * 2019$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3 + \frac{x-3}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{4-x}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că funcția f este convexă pe $[5, +\infty)$.
- 5p** c) Demonstrați că $x - 3 \leq e^{x-4}$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x^2 + 4x + 1$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = 5$.
- 5p** b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe \mathbb{R} .
- 5p** c) Determinați numărul real a , $a > 1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{x} dx = 13 + \ln a$.