

Integrale definite

Formula Leibniz – Newton:

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă, $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ primitivă a lui f pe $[a, b]$.

Numărul $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ se numește *integrala definită* a funcției f pe intervalul $[a, b]$.

Etape:

I. Se determină multimea primitivelor funcției f (se integreaza functia dupa formulele din tabelul de integrale).

II. Se calculeaza valorile primitivei obtinute in capetele domeniului de integrare, conform formulei Leibniz – Newton

$$\text{Ex1. } \int_{-1}^1 (3x^2 - 4x + 2)dx$$

$$\text{Ex2. } \int_1^e \left(\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x}\right)dx$$

$$\text{Ex3. } \int_1^4 9\sqrt{x} \, dx$$

$$\text{Ex4. } \int_{-2}^2 \frac{2}{x^2 - 9} dx$$

$$\text{Ex5. } \int_{-1}^1 (7x^6 + 4x^3 - 6x^2 + 6x - 5)dx$$

$$\text{Ex6. } \int_1^2 \left(\frac{2}{x^2} - \frac{6}{x}\right)dx$$

$$\text{Ex7. } \int_1^4 9\sqrt{x^3} \, dx$$

$$\text{Ex8. } \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4}{x^2 - 12} dx$$

$$\text{Ex9. } \int_{-1}^1 \frac{x^2 - x + 2}{x} dx$$

Ex 10.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x^2 - x + 1$.

a) Calculați $\int_0^1 (f(x) + 1)dx$.

b) Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f .

c) Determinați numărul natural nenul n , știind că $\int_0^n F(x)dx = \frac{n^3}{3}$.

Ex 11.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^3 + 3x^2$.

a) Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 3x^2)dx = 15$.

b) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = 2015$.

c) Determinați numărul natural n , $n > 1$, știind că $\int_1^n \frac{f(x)}{x^2} dx = 9$.

Ex 12.

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$.

a) Verificați dacă funcția $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x - \frac{1}{x} + \ln x$ este o primitivă a funcției f .

b) Calculați $\int_1^e x \cdot f(x^2)dx$.

c) Determinați numărul real $a > 1$, pentru care $\int_1^a \left(f(x) - \frac{1}{x}\right)dx = \frac{3}{2}$.