OPERATII CU MATRICE

I. ADUNAREA/SCADEREA MATRICELOR

• *Se opereaza doar matrice de acelasi ordin* • *Se realizeaza termen cu termen*	
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-x & b-y \\ c-z & d-t \end{pmatrix}$

1. Fie $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ si $= \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Calculati A + B =

A – B =

2. Fie $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 5 \end{pmatrix}$. Determinati x si y cu proprietatea ca A + ^{t}A = $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$.

ÎNMULȚIREA UNEI MATRICE CU UN NUMĂR REAL

Se realizeaza inmultind fiecare element al matricei cu numarul din fata matricei	
$n \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot a & n \cdot b \\ n \cdot c & n \cdot d \end{pmatrix}$	$\frac{1}{n} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{n} & \frac{b}{n} \\ \frac{c}{n} & \frac{d}{n} \end{pmatrix}$

3. Determinati matricea X daca 5X = $2\begin{pmatrix} -\frac{7}{2} & 1 & -5 \\ 5 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

4. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 2 \\ x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

Arătați că $A(2017+x) + A(2017-x) = 2A(2017)$, pentru orice număr real x.

INMULTIREA MATRICELOR

• *Se opereaza doar daca numarul de coloane al primei matrice este egal cu numarul de linii al celei de a doua matrice* • *Produsul va avea numarul de linii al primei matrice si numarul de coloane al celei de a doua matrice* • *Se realizeaza adunand produsele termenilor fiecarei linii din prima matrice cu elementele fiecarei coloane a celei de a doua matrice*	
$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & t \\ y & p \\ z & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cdot C_1 & L_1 \cdot C_2 \\ L_2 \cdot C_1 & L_1 \cdot C_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & t \\ y & p \\ z & q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz & at+bp+cq \\ dx+ey+fz & dt+ep+fq \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cdot C_1 \\ L_2 \cdot C_1 \\ L_3 \cdot C_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \\ gx+hy+iz \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cdot C_1 & L_1 \cdot C_2 \\ L_2 \cdot C_1 & L_1 \cdot C_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by & az+bt \\ cx+dy & cz+dt \end{pmatrix}$

Proprietatile inmultirii matricelor

Inmultirea matricelor este asociativa	$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Inmultirea matricelor nu este comutativa	$A \cdot B \neq B \cdot A$
Elementul neutru al inmultirii matricelor patratice este matricea unitate $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$ $I_n \cdot I_n = I_n$ $(I_n)^k = I_n$

5.

Calculati:

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$

b. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} =$

c. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} =$

6. Simulare XI 2017

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} -1 & x \\ 2 & x-3 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Arătați că $A(0)+A(2)=2A(1)$.

b) Demonstrați că $A(1)\cdot A(x)+3A(1)=O_2$, pentru orice număr real x, unde $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

7. Sesiunea specială 2017

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Arătați că $(A+B)(B-A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$.

c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A\cdot X=B$.

8. Simulare 2016

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Arătați că $(A-I_3)(A-I_3)(A-I_3)=O_3$, unde $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Rezolvați ecuația matriceală $AX=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

9. Iulie 2016

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Arătați că $B\cdot B+A=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Determinați numerele reale x și y, pentru care $A+B=\begin{pmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 4^y \end{pmatrix}$.

10. August 2016

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

b) Arătați că $A\cdot B=B\cdot A$, pentru orice număr real x.

c) Determinați numărul real x, pentru care $A\cdot A-3(A+B)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Simulare XI 2015

Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ a & 3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

a) Arătați că $A(-1)+A(1)=2A(0)$.

b) Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=5I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1)\cdot X=4A(2)$.

12. Iulie 2015

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

b) Arătați că $A+B=5C$.

c) Demonstrați că $AB+BA+4I_2=25C$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

13. August 2015

Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Arătați că $M\cdot M+3M+4I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

c) Determinați numerele reale a și b astfel încât $M\cdot M\cdot M=aM+bI_2$.

14. Simulare 2014

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{pmatrix}$.

b) Determinați numărul real m pentru care matricele $A+mI_3$ și $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 3\\ 1 & 4 & 8\end{pmatrix}$ sunt egale.

c) Rezolvați ecuația matriceală $AX=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 3\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

15. Simulare XI 2014

Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

a) Calculați $A(2)+A(-2)$.

b) Determinați numerele reale p și q pentru care $A(2)\cdot\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$.

16. Sesiunea specială 2014

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Arătați că $2A\cdot B-B\cdot A=I_2$.

c) Determinați numărul real x știind că $A\cdot A-xA=I_2$.

17. Iulie 2014

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}3 & x\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

b) Determinaţi numărul real x ştiind că $B+C=A$.

c) Arătaţi că $B\cdot B+B=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

18. Rezervă 2014

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Arătaţi că $A\cdot A=5A$.

c) Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A+\begin{pmatrix}x & y\\ y & -3\end{pmatrix}=I_2$.

19. Model oficial 2011

Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

b) Calculaţi A^2-2A+I_2.

c) Determinaţi matricele $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X^2=A$.

20. Iulie 2011

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{Z}$.

a) Calculați A^2-3A.

b) Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+3ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{Z}$.

21. Iulie 2010

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2-A.

c) Rezolvați ecuația $A\cdot X=\begin{pmatrix}2010 & 2010\\ 2009 & 2010\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.